Ecricome 2004, option scientifique.

EXERCICE 1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.
L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.
Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

1) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale. Dans la suite de l'exercice un entier naturel impair k est fixé.

2) On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \big(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, , T(\lambda_n^k)\big)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

3) Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

4) Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\quad AS^{pk} = S^{pk}A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $\quad AS = SA$.

5) On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \big[0, \dfrac{\pi}{4}\big]$ par : $\quad f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante : $\quad \begin{cases} I_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big[f(x)\big]^n \,\mathrm{d}x \end{cases}$

Partie 1 *Etude de la bijection réciproque de f.*

1) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2) Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3) Justifier que : $\quad \forall x \in J, \quad \begin{cases} \cos\big(f^{-1}(x)\big) = \dfrac{1}{x} \\ \sin\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5) En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2 *Etude des dérivées successives de f.*

1) Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

3) Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)X.Pn$
En déduire le polynôme P_3.

5) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Partie 3 *Etude de la suite d'intégrales.*

1) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.

2) Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

3) En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.

4) Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \geqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$

En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}I_n$.

PROBLÈME

Partie I : Etude d'une variable discrète d'univers image fini.

Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules ($n \geqslant 1,\ m \geqslant 1$).
On s'intéresse au protocole suivant
• On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0,1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1-p$.
• On met une boule dans l'urne choisie.
• On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

A. Préliminaires.

On définit la suite de terme général a_n par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n} \qquad n \geqslant 1$$

1) Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geqslant 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

3) Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
On admet que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

B. Etude de cas particuliers.

Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1) Donner les lois de R_1, R_2 et R_3. Justifier vos calculs.

2) Calculer l'espérance et la variance de R_1, R_2 et R_3.

Dans toute la suite du problème $n \geqslant 2$.

3) Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?

4) Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.

a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$-ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.

b) Donner alors la probabilité $P([R_n = k])$.

5) Vérifier que

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad 2(k+1)P([R_n = k+1]) = (n+k)P([R_n = k])$$

6) Par sommation de la relation qui précède, en déduire que

$$E(R_n) = n - (2n-1)P([R_n = n-1])$$

7) Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.

8) De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$$

9) En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.

10) Ecrire un algorithme, en langage Pascal, permettant de calculer l'espérance de R_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

C. Retour au cas général.

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1) En utilisant un argument probabiliste, montrer que :

$$q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} = 1 \tag{1}$$

2) On pose $u_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} q^k \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}$.

a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et donner à l'aide de la relation (1) un majorant de u_m ne dépendant pas de m.
Etablir alors la convergence de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, donner un équivalent de C_{m-1+k}^{m-1} lorsque m tend vers $+\infty$.

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m\to+\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}$$

d) Prouver alors que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$.

Partie II : Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Dans cette dernière partie l'urne B, initialement vide, a une capacité illimitée et l'urne A, initialement vide, peut contenir au plus n boules ($n \geqslant 1$).

On s'intéresse au protocole suivant
• On choisit l'urne A avec. la probabilité $p \in]0,1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
• On met une boule dans l'urne choisie.
• On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'urne A soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix successifs des urnes étant mutuellement indépendants.

On note alors T_n le nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne B et $(Z_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$, les variables aléatoires définies de la façon suivante :
• Z_1 compte le nombre de boules mises dans B avant de mettre la première boule dans A.
• Pour tout entier j de $[\![2,n]\!]$, Z_j compte le nombre de boules mises dans B entre la $(j-1)$-ième boule et la j-ième boule mises dans A.
On admet que T_n est une variable aléatoire.

1) Quel est l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_n ?

2) Pour tout entier naturel k appartenant à $T_n(\Omega)$, donner la valeur de $P([T_n = k])$.

3) Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([T_n = k]) = 1$.

4) Pour tout entier j de $[\![1,n]\!]$, donner la loi, l'espérance, la variance de Z_j.

5) Exprimer T_n en fonction des variables $(Z_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et de l'entier n.

6) En déduire l'espérance et la variance de la variable T_n.